Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

# Übungsblatt 3

## Glatte Mannigfaltigkeiten

9. Der stereographische Atlas der Sphäre.
   Wir definieren die $n$–Sphäre $S^n$ als die Menge $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \ \langle x, x\rangle = 1\}$. Für einen Punkt $a \in S^n$ definieren wir Karten $(U_\pm, \phi_\pm)$ durch

$$U_+ = S^n \setminus \{a\}, \qquad \phi_+ : U_+ \to \{a\}^\perp,$$
$$U_- = S^n \setminus \{-a\}, \quad \phi_- : U_- \to \{a\}^\perp,$$

   wobei $\phi_\pm(p)$ durch den Schnitt der Geraden durch $\pm a$ und $p$ mit der Ebene durch 0 senkrecht zum Vektor $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben ist.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\phi_+(x) = \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 - \langle x, a\rangle}, \qquad\qquad \phi_-(x) = \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 + \langle x, a\rangle}.$$

   (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Übergangsabbildung $\psi_{-+} = \phi_- \circ {\phi_+}^{-1}$.

   (c) (1 Punkte) Zeigen Sie, daß $S^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ ist.

   Hinweis: Zeichnen Sie sich die Geometrie auf.

10. Der Torus.
    (4 Punkte) Es seien $X$ ein topologischer Raum, $Y$ eine Menge und $f : X \to Y$ eine surjektive Funktion. Die von $f$ induzierte Topologie oder Quotiententopologie auf $Y$ ist wie folgt definiert: Eine Teilmenge $V \subset Y$ heisst offen, falls $f^{-1}(V)$ in $X$ offen ist. Es sei nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $Y = X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Dann gibt es eine kanonische Abbildung $\pi : X \to Y, x \to [x]$. $Y$ versehen mit der von $\pi$ induzierten Topologie heisst Quotientenraum von $X$.
    Zeigen Sie, daß folgende Räume homöomorph sind:

    (a) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Äquivalenzrelation $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_i - y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2.$

(b) Ein Quadrat, dessen gegenüberliegende Kanten miteinander identifiziert sind.

(c) $S^1 \times S^1$.

(d) Die Rotationsfläche $\{((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi], r > 0, R > r\}$.

Dieser Raum heisst $T^2$.

11. Der projektive Raum.
Der reell projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge der Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir identifizieren zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf einer Geraden mittels der Äquivalenzrelation $x \sim y$, genau dann, wenn es ein $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ gibt, so daß $y = ax$. Dann sei

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right) / \sim,$$

versehen mit der Quotiententopologie aus Aufgabe 10.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ mit $U_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x^i \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^n$ und $\phi_i = \{\xi^1_{(i)}, \ldots, \widehat{\xi^i_{(i)}}, \ldots, \xi^{n+1}_{(i)}\} : U_i \to \mathbb{R}^n$ ein wohldefinierter Atlas ist, wobei $\xi^j_{(i)}(x) = x^j / x^i$ und $\widehat{\xi^i_{(i)}}$ bedeutet, dass $\xi^i_{(i)}$ weggelassen wird. Bestimmen Sie die Übergangsabbildungen $\psi_{ji} = \phi_j \phi_i^{-1}$, und zeigen Sie, daß $\mathbb{RP}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

(b) (2 Punkte) Wir definieren auf der $n$–Sphäre $S^n$ die antipodale Abbildung $f : S^n \to S^n, x \mapsto -x$ und eine Äquivalenzrelation $\sim_f$, unter der $x$ und $f(x)$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass $S^n / \sim_f \;=\; \mathbb{RP}^n$, wobei $=$ für einen Homöomorphismus steht.

12. Der Satz vom konstanten Rang.
(4 Punkte) Es sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, wobei $M \subset \mathbb{R}^m$ offen ist. Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen mehrmals, um folgendes zu zeigen: Wenn das Differential $\mathrm{d}f|_p$ in jedem Punkt konstanten Rang $k \leq n$ besitzt, dann existieren für jedes $p \in M$ Karten $(U, \phi)$ von $M$ um $p$ und $(V, \psi)$ von $\mathbb{R}^n$ um $f(p)$, so daß $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ folgende Form annimmt:

$$(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Abgabetermin: Freitag, 14. 5. 2010 um 10:00 Uhr.